|  |  |
| --- | --- |
|  | **Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  **высшего образования**  **«Московский государственный технический университет**  **имени Н.Э. Баумана**  **(национальный исследовательский университет)»**  **(МГТУ им. Н.Э. Баумана)** |

ФАКУЛЬТЕТ «Фундаментальные науки»

КАФЕДРА «Вычислительная математика и математическая физика» (ФН-11)

**РАСЧЁТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

**к курсовой работе на тему:**

*Псевдоевклидово пространство, определение и основные свойства. Связь со специальной теорией относительности.*

Дисциплина: *Дифференциальная геометрия и основы тензорного исчисления*

Студент группы ФН11-52Б  **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_** М.Х. Хаписов

(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Руководитель курсовой работы,

канд. физ.-мат. наук, доцент **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_** Е.В. Осипов

(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Оценка: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Москва, 2022

**СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ**

Руководитель курсовой работы \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Осипов Е.В.

подпись, дата

Исполнитель темы,

студент группы ФН11-52Б \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Хаписов М.Х.

подпись, дата

**СОДЕРЖАНИЕ**

**ВВЕДЕНИЕ**4

**1 Теоретическая часть**5

**1.1 Индекс евклидова пространства**5

**1.2 Собственно евклидовы и псевдоевклидовы пространства**8

**1.3 Галилеевы координаты. Преобразование Лоренца**12

**1.4 Специальная теория относительности и пространство Минковского**12

**1.5 Эксперименты, приводящие к теории относительности**17

**1.6 Постулаты СТО**19

**1.6.1 Постулат относительности**19

**1.6.2 Постулат постоянства скорости света**21

**1.7 Псевдоевклидова плоскость**21

**1.8 Тензор кривизны Римана-Кристоффеля. Секционная кривизна. Символы Кристоффеля второго рода** 26

**2 Практическая часть**28

**2.1 Постановка и решение задачи №1**28

**2.2 Постановка и решение задачи №2** 30

**2.3 Постановка и решение задачи №3**32

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**35

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**36

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**37

**ВВЕДЕНИЕ**

Курсовая работа – вид учебной работы, направленный на развитие практических навыков и умений, а также формирование компетенций обучающихся в процессе выполнения определенных видов заданий, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

Задачами данной курсовой работы являются:

- ознакомление с псевдоевклидовым пространством, его определением и основными свойствами

- изучение основ специальной теории относительности

- выявление связи между псевдоевклидовым пространством и специальной теорией относительности;

- доказать, что кривизна в двумерном направлении не зависит от выбора базиса;

- доказать, что для поверхности в кривизна в двумерном направлении совпадает с гауссовой кривизной;

- доказать, что в пространстве сфера с метрикой, индуцированной обычной евклидовой метрикой в , будет являться пространством постоянной кривизны.

**1 Теоретическая часть**

* 1. **Индекс евклидова пространства.**

Рассмотрим -мерное комплексное евклидово пространство . Найдём вектор (векторы, квадрат которых не равен нулю, называются изотропными), после чего произведём его нормировку, поделив вектор на его длину (являющейся, вообще говоря, комплексным числом).

Построим теперь гиперплоскость , ортогональную к орту и проходящую через фиксированную точку. Данная гиперплоскость сама будет нести на себе -мерную комплексную евклидову геометрию. Повторим наше построение: выберем изотропный вектор из плоскости , нормируем его и получим орт . Проведём гиперплоскость , ортогональную к орту и проходящую через ту же фиксированную точку. Продолжив этот процесс, получим последовательность вложенных друг в друга плоскостей убывающего числа измерений

и последовательность единичных векторов

.

При этом , так как . Следовательно,

Векторы линейно независимы, что следует из их построения, и образуют ортонормированный базис.

Координаты ковариантного метрического тензора типа в таком базисе приобретают вид:

То есть матрица единичная. Тогда обратная к ней матрица , соответствующая контравариантному метрическому тензору типа , также будет единичной:

В таком случае исчезает разница между ко- и контравариантными компонентами:

Получаем тогда, что

В частности,

Тогда вектор, соединяющий точку с координатами и точку c координатами , будет иметь координаты , следовательно расстояние между этими точками можно определить как (в общем случае )

Теперь аналогично рассмотрим случай вещественного евклидова пространства, также выбрав произвольный вектор . Однако мы не всегда сможем нормировать его, так как выражение не имеет места для в связи с мнимостью знаменателя.

Для определим:

Для проведём нормирование иначе:

Векторы со скалярным квадратом –1 назовём мнимо-единичными. Они являются вещественными векторами этого пространства, обладающими тем не менее мнимой длиной

Далее построим гиперплоскость , ортогональную к и про и проведём построение, аналогичное вышеизложенному. Получим вложенную последовательность единичных и мнимо-единичных векторов , образующих ортонормированный базис. Пронумеруем их так, чтобы сначала шли мнимо-единичные орты , а после единичные , где число мнимо-единичных векторов .

Метрический тензор в данном случае примет вид:

Ко- и контравариантные компоненты связаны следующим соотношением:

Получаем тогда, что

и соответственно

Покажем теперь, что число мнимо-единичных векторов в данном пространстве инвариантно относительно выбора ортонормированного базиса . Возьмём базис (первые векторов мнимо-единичны) и базис (первые векторов мнимо-единичны).

Допустим, например, что , и покажем, что это приводит к противоречию. Рассмотрим в совокупности орты . Количество векторов , поэтому эти векторы должны быть линейно зависимы:

Это равенство возводим почленно в скалярный квадрат имея в виду, что при , , :

Так как и , а значит левая часть уравнения не может быть больше нуля, когда как правая не может быть меньше нуля. Значит это равенство имеет место тогда и только тогда, когда

Получили линейную независимость векторов , что и являет собой противоречие.

Таким образом, число мнимо-единичных векторов *не зависит от выбора ортонормированного базиса и является свойством пространства*. Число называется индексом евклидова пространства [1].

**1.2 Собственно евклидовы и псевдоевклидовы пространства**

Вещественные евклидовы пространства разделяются на два класса: собственно евклидовы, в которых квадрат длины изотропных векторов положителен, и псевдоевклидовы, в которых квадрат этой длины может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Построение ортонормированного базиса в случае собственно евклидовых пространств проводится гораздо проще, нежели для комплексных или псевдоевклидовых пространств. Здесь

Из определения собственно евклидова пространства следует, что оно является евклидовым пространством с индексом . Очевидно, что любое евклидово пространство с индексом является собственно евклидовым. Действительно, означает, что все векторы ортонормированного базиса – единичные и, следовательно, , где . Следовательно, , что означает, что данное пространство является собственно евклидовым.

Рассмотрим для примера случай евклидова пространства. Случай приводит к двумерной собственно евклидовой геометрии, то есть к классической планиметрии. Случай отличается от первого лишь формально:

Здесь при правую часть каждой формулы следует домножить на (кроме последней: там нужно домножить на ). То, что мы называли расстоянием на обычной плоскости, при остаётся тем же расстоянием после умножения на . Ясно, что всякое предложение классической планиметрии может быть переписано на язык этой геометрии простой перефразировкой, а значит возможно сведение данной геометрии к собственно евклидовой, поэтому и принципиально различать эти два случая не имеет смысла. Случай же как раз и представляет собой псевдоевклидово пространство для случая .

Собственно евклидовы пространства по своей геометрии вполне аналогичны обычному пространству и отличаются от него лишь числом измерений: при 𝑛 = 3 мы получаем обыкновенную стереометрию, равно как при 𝑛 = 2 – обыкновенную планиметрию (как было видно из примера), а при 𝑛 = 1 – геометрию на обычной прямой. Псевдоевклидовы пространства по характеру своей метрики обладают весьма своеобразными чертами, не имеющими аналогов в обычной геометрии.

Укажем, что хотя выражение и вещественное, но может принимать в псевдоевклидовом случае и положительные, и отрицательные, и нулевые значения, а значит, длина вектора |𝑥| может быть и вещественной, и чисто мнимой, и нулём. Условимся в первом случае брать |𝑥| положительной, а во втором случае – с положительным коэффициентом при 𝑖. Тогда умножение вектора х на положительное число означает умножение |𝑥| на то же число. Таким образом, отрезки 𝐴B в псевдоевклидовом пространстве будут трех видов: вещественной, чисто мнимой и нулевой длины (причем последний случай возможен и без совпадения точек 𝐴 и 𝐵). Заметим, что наличие мнимых длин (расстояний) в псевдоевклидовом пространстве будет являться единственным нарушением соглашения о том, что в вещественном пространстве рассматриваются лишь вещественные численные значения.

Псевдоевклидово пространство играет основную роль в теории относительности, причем разнотипность отрезков вещественной и чисто мнимой длины отражает разнотипность пространственных и временных «расстояний». При данном числе измерений 𝑛 собственно евклидово пространство является единственным с точностью до изоморфизма. Действительно, отобразив каждую точку одного собственно евклидова пространства в другое, все свойства точек и векторов, включая метрику пространства, остаются неизменными, так как в ортонормированном базисе второго пространства они выражаются точно также, как выражались в ортонормированном базисе первого. Такое совпадение и говорит об изоморфизме этих пространств. Напротив, псевдоевклидовых пространств будет целых 𝑛, различных по своим свойствам [1].

Наконец, дадим строгое определение псевдоевклидову пространству. Определим -мерное псевдоевклидово пространство как линейное вещественное пространство 𝑉 размерности () со скалярным произведением 〈𝑥, 𝑦〉 векторов 𝑥 и 𝑦, заданным посредством такой невырожденной симметричной билинейной формы , что соответствующая ей квадратичная форма является знакопеременной.

Пусть – ортогональный базис пространства 𝑉 и () – матрица формы 𝐴(𝑥, 𝑦) в этом базисе

.

Если и – контравариантные координаты векторов 𝑥 и 𝑦, то . Величины представляют собой координаты ковариантного метрического тензора псевдоевклидова пространства типа .

Известно, что матрицу () симметричной билинейной формы можно привести к диагональному виду путём выбора некоторого нового базиса. В силу невырожденности формы и знакопеременности формы этот базис можно выбрать так, что координаты метрического тензора в этом базисе будут равны нулю при 𝑖 ≠ 𝑗 и единице или минус единице при 𝑖 = 𝑗. Число 𝑝 положительных и число отрицательных диагональных элементов не зависит ни от способа приведения матрицы билинейной формы к диагональному виду, ни от выбора ортонормированного базиса (последнее было доказано в пункте 1.1). Пара называется сигнатурой псевдоевклидова пространства.

С помощью сигнатуры можно обозначать 𝑛-мерное псевдоевклидово пространство как . Важнейшим примером псевдоевклидова пространства является пространство Минковского , которое будет рассмотрено позднее в данной работе.

Теперь определим квадрат длины вектора 𝑥 с координатами в пространстве с метрическим тензором при помощи соотношения

.

Так как квадратичная форма является знакопеременной, то можно указать ненулевые векторы с положительным, отрицательным и нулевым квадратом длины. Чтобы в качестве меры длины векторов получать лишь вещественные числа, за длину вектора принимают следующую величину:

**1.3 Галилеевы координаты. Преобразование Лоренца**

В псевдоевклидовых пространствах важную роль играют системы координат, в которых квадрат интервала имеет вид

. (1)

Такие системы координат называют галилеевыми. Преобразования координат, сохраняющие для квадрата интервала выражение (1), называются *преобразованиями Лоренца* [2].

**1.4 Специальная теория относительности и пространство Минковского**

Специальная теория относительности (СТО) – теория, описывающая движение, законы механики и пространственно-временные отношения при произвольных скоростях движения, меньших скорости света в вакууме, в том числе близких к скорости света. С точки зрения математики специальная теория относительности является теорией инвариантов группы Лоренца, состоящей из однородных линейных преобразований координат четырёхмерного пространства-времени, оставляющие инвариантной квадратичную форму с сигнатурой : (см. пункт 1.3). В частности, группа Лоренца включает в себя пространственные повороты в трёх плоскостях , лоренцевы преобразования , отражения пространственных осей и все их композиции.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчёта (ИСО) и . Пусть относительно событие произошло в точке () пространства событий, а относительно – в точке (). Будем предполагать, что зависимость между координатами относительно разных ИСО будет линейной, так как лишь при линейном характере зависимости обеспечивается сохранение закона инерции в любой ИСО. Далее необходимо обеспечить постоянность скорости распространения света с точки зрения любой ИСО. Иными словами, нужно потребовать, чтобы любой сигнал, распространяющийся в каком-либо направлении со скоростью относительно одной ИСО распространялся бы с этой же скоростью и относительно любой другой ИСО.

Пусть первое событие состоит в том, что из некоторой точки в некоторый момент времени подаётся сигнал, а второе событие – в том, что этот сигнал принимается в какой-то другой точке в другой момент времени. Координаты событий и относительно обозначим () и (), относительно : () и () соответственно. Тогда факт того, что сигнал распространяется со скоростью , относительно системы можно записать в виде:

,

т.е. путь, пройденный световым лучом, равен протекшему времени, умноженному на . Далее получим:

(2)

Аналогично для :

(3)

Необходимо, чтобы из того, что сигнал распространяется со скоростью относительно одной ИСО, следовала бы такая же скорость распространения относительно любой другой ИСО, то есть утверждения (2) и (3) должны быть эквивалентны, то есть следовать друг из друга.

Но потребуем даже большего: пусть для любых двух событий и левые части выражений (2) и (3) будут тождественно равны:

. (4)

Ясно, что утверждение (4) является усилением изначального требования: принимая его за истинное, становится видно, что из (2) следует (3) и из (3) следует (2), однако даже если левые части выражений (2) и (3) не обращаются в ноль (то есть утверждения (2) и (3) неверны), левые части этих выражений всё равно остаются тождественно равны друг другу, что, вообще говоря, не требовалось изначально. Данное усиление оправдано тем, что иначе мы пришли бы к физически нелепым выводам, которые всё равно вынудили бы нас сделать дополнительные предположения.

Итак, линейная зависимость () от () при переходе от к должна быть такова, что для любых двух событий и выполнено утверждение (4).

Заметим, что в четырёхмерном псевдоевклидовом пространстве скалярный квадрат вектора выражается как и, следовательно, квадрат расстояния между точками (с координатами и соответственно) в нём задаётся как

(5)

Выберем в данном псевдоевклидовом пространстве некоторый ортонормированный базис и условимся изображать каждое событие на этом пространстве точкой , где – ортонормированная координатная система. Очевидно, рассматривая событие относительно другой ИСО, мы бы получили аналогичную координатную систему , также являющуюся ортонормированной. Таким образом, пространство событий можно так взаимно однозначно отобразить на четырёхмерное псевдоевклидово пространство , называемое пространством Минковского, что координаты событий (), вычисленные с точки зрения любой ИСО, будут являться ортонормированными координатами в пространстве Минковского [1].

Основы специальной теории относительности заложены работами Минковского, которому удалось придать этой теории очень изящную математическую форму, используя следующее обстоятельство: если ввести вместо обычного времени мнимую величину , то формальное поведение пространственных координат и координаты времени будет одинаковым в преобразованиях группы Лоренца и, следовательно, во всех законах природы, инвариантных относительно этой группы, так как характерный для группы Лоренца инвариант переходит в

,

который можно рассматривать как квадрат расстояния от нуля до некоторой точки пространства Минковского, являющегося геометрической интерпретацией четырёхмерного пространства-времени.

Вследствие того, что группа Лоренца сохраняет инвариантной квадратичную форму четырех мировых координат, теория инвариантов этой группы допускает геометрическое представление и оказывается естественным обобщением обычного векторного и тензорного исчисления на случай четырехмерного пространства [3].

Геометрические свойства мира Минковского могут быть установлены после того, как будет известно некоторое инвариантное соотношение между координатами точек, которое можно истолковать как расстояние между двумя точками пространства. Если оставаться в рамках ИСО, для любой пары событий остается инвариантным интервал между событиями. Переход от одной ИСО к другой описывается преобразованиями Лоренца, и никакие другие преобразования в рамках СТО нам не нужны. Следовательно, в качестве основной инвариантной квадратичной формы, определяющей «расстояние» в мире Минковского, мы можем – из физических соображений – взять выражение для квадрата интервала между событиями:

, где (6)

Обратимся к постулатам СТО (постулатам Эйнштейна). Постулат 1 (принцип относительности Эйнштейна): *законы природы одинаковы во всех системах координат, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга*. Это означает, что форма зависимости физических законов от пространственно-временных координат должна быть одинаковой во всех ИСО, то есть законы инвариантны относительно переходов между ИСО. Принцип относительности устанавливает равноправие всех ИСО.

Постулат 2 (принцип постоянства скорости света): *скорость света в вакууме одинакова во всех системах координат, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга*.

Таким образом, постулаты Эйнштейна (подробнее о них в пункте 1.6), следствием которых является инвариантность интервала между событиями, приводят к тому, что геометрия пространства Минковского определяется основной фундаментальной формой вида (6). Из вида этой формы ясно, что координаты и время не равноправны.

Переход от инерциальных систем отсчета к неинерциальным меняет вид интервала между событиями. Хотя это выражение всегда остается инвариантным, его форма становится уже иной – квадрат интервала приобретает вид

Подставляя это выражение в (6), находим координаты ковариантного метрического тензора :

Итак, пространство четырех переменных () специальной теории относительности является четырехмерным псевдоевклидовым пространством сигнатуры . Оно возникает отнюдь не простым добавлением четвертой (временной) координаты к трем пространственным, а возникает при своеобразном определении (5) инвариантного расстояния между точками этого пространства. Физическая причина необходимости рассмотрения псевдоевклидова пространства состоит в том, что, несмотря па тесную связь пространственных и временных отсчетов для события, эти отсчеты в СТО неравноправны.

**1.5 Эксперименты, приводящие к теории относительности**

Преобладающей теорией распространения света в XIX веке была теория светоносного эфира, стационарной среды, в которой свет движется аналогично тому, как звук в воздухе, то есть скорость света постоянна во всех направлениях в эфире и не зависит от скорости источника. Таким образом, наблюдатель, движущийся относительно эфира, должен измерять своего рода «эфирный ветер».

Учёными был проведён ряд оптических опытов, которые должны были дать положительный результат для величин до первого порядка по и которые, таким образом, должны были продемонстрировать относительное движение эфира, но результаты были отрицательными. Объяснение дал Огюстен Френель (1818 г.) введением вспомогательной гипотезы, так называемого «коэффициента увлечения», то есть материя увлекает эфир в незначительной степени. Этот коэффициент был непосредственно продемонстрирован экспериментом Физо (1851 г.).

Этот опыт провёл Ипполит Физо в 1851 году для измерения относительной скорости света в движущейся воде. Физо использовал специальный интерферометр для измерения влияния движения среды на скорость света.

Согласно теории, преобладавшей в то время, проходящий через движущуюся среду свет будет увлекаться этой средой таким образом, что измеренная скорость света была бы простой суммой его скорости внутри среды и скорости среды. Физо действительно обнаружил эффект увлечения, но наблюдаемая величина эффекта была намного ниже, чем ожидалось. Когда он повторил эксперимент с воздухом вместо воды, то не заметил никакого эффекта.

Позже было показано, что все оптические опыты первого порядка должны давать отрицательный результат из-за этого коэффициента. Кроме того, были проведены некоторые электростатические эксперименты первого порядка, которые снова дали отрицательные результаты. В целом, Хендрик Лоренц ввёл несколько новых вспомогательных переменных для движущихся наблюдателей, продемонстрировав, почему все оптические и электростатические опыты первого порядка дали нулевые результаты.

Однако теория стационарного эфира дала бы положительные результаты, если бы опыты были достаточно точными, чтобы измерять величины второго порядка по . Альберт А. Майкельсон провёл первый опыт такого рода в 1881 году, а в 1887 году последовали более сложные измерения Майкельсона — Морли. Два луча света, идущие некоторое время в разных направлениях, были сведены в интерференционную картину, так что разная ориентация относительно эфирного ветра должна была привести к смещению интерференционных полос. Но результат снова оказался отрицательным.

Опыт Майкельсона-Морли являлся экспериментальной попыткой обнаружить существование светоносного эфира, гипотетической среды, заполняющей пространство, которая считалась носителем световых волн.

В опыте сравнивалась скорость света в перпендикулярных направлениях в попытке обнаружить относительное движение материи через неподвижный светоносный эфир («эфирный ветер»). Результат был отрицательным, поскольку Майкельсон и Морли не обнаружили существенной разницы между скоростью света в направлении движения через предполагаемый эфир и скоростью под прямым углом. Этот результат обычно считается первым веским доказательством против преобладающей в то время теории эфира, а также началом направления исследований, которое в конечном итоге привело к созданию специальной теории относительности, исключающей стационарный эфир. Об этом эксперименте Эйнштейн писал: «Если бы опыт Майкельсона — Морли не поставил нас в серьёзное замешательство, никто бы не счёл теорию относительности (наполовину) искуплением».

**1.6 Постулаты СТО**

**1.6.1 Постулат относительности**

Отрицательный результат многих опытов, поставленных с целью обнаружить влияние движения Землина различные процессы путем измерений на ней самой,позволяет почти с достоверностью утверждать принципиальную независимость любых явлений в движущейся системе от поступательного движения этой системы в целом. Постулат относительности утверждает существование бесконечного множества систем отсчёта, называемых инерциальными, движущихся равномерно и прямолинейно относительно друг друга, в которых все явления протекают одинаково. Это означает, что форма зависимости физических законов от пространственно-временных координат должна быть одинаковой во всех ИСО, то есть законы инвариантны относительно переходов между ИСО. Принцип относительности устанавливает равноправие всех ИСО.

Постулат относительности полностью устраняет из физических теорий эфир, рассматриваемый ранее в качестве субстанции. Действительно, ведь покой или движение относительно эфира не могут быть обнаружены с помощью наблюдений, а значит и говорить об этом не имело бы большого смысла, а упругая теория света к тому моменту практически полностью замещена электромагнитной. [3]

Формально, принцип относительности Эйнштейна распространяет классический принцип относительности (Галилея) с механических на все физические явления. В том числе он должен распространяться и на электромагнитные явления, описываемые уравнениями Максвелла, которые выведены из эмпирически выявленных закономерностей. Однако, согласно последним, скорость распространения света является определённой величиной, не зависящей от скорости источника (по крайней мере в одной системе отсчёта). Из принципа относительности следует, что она не должна зависеть от скорости источника во всех ИСО в силу их равноправности. А значит, она должна быть постоянной во всех ИСО. В этом заключается суть второго постулата.

**1.6.2 Постулат постоянства скорости света.**

Принятие принципа относительности недостаточно для того, чтобы сделать вывод о ковариантности законов природы относительно преобразований Лоренца. Например, классическая механика вполне согласуется с принципом относительности, но преобразования Лоренца неприменимы к её уравнениям. Эйнштейн показал, что для применимости этих преобразований необходимо лишь принять одно электродинамическое положение: *скорость света не зависит от движения источника*. Если, например, источник света точечный, то фронтом волны является сфера с покоящимся центром. Стоит сказать, что об универсальном постоянстве скорости света речи не идёт, она постоянна только в ИСО. [3]

Хотя неинвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований Галилея привела к построению СТО, последняя имеет более общий характер и применима ко всем видам взаимодействий и физических процессов. Фундаментальная константа {\displaystyle c}, возникающая в преобразованиях Лоренца, имеет смысл предельной скорости движения материальных тел. Численно она совпадает со скоростью света, однако этот факт, согласно современной квантовой теории поля (уравнения которой изначально строятся как релятивистски инвариантные) связан с безмассовостью фотона. Даже если бы фотон имел отличную от нуля массу, преобразования Лоренца от этого бы не изменились. Поэтому имеет смысл различать фундаментальную константу — скорость {\displaystyle c} и скорость света{\displaystyle c\_{em}}. Первая константа отражает общие свойства пространства и времени, тогда как вторая связана со свойствами конкретного взаимодействия.

**1.7 Псевдоевклидова плоскость**

Особенности псевдоевклидова пространства можно проиллюстрировать на примере псевдоевклидовой плоскости. Для этого одна из координатных осей должна быть обязательно осью времени (или пропорциональной времени), потому что в СТО чисто пространственная геометрия остается еще евклидовой и лишь пространство-время описывается псевдоевклидовой геометрией. Удобнее всего при нашем выборе систем отсчета рассмотреть плоскость ().

Каждое событие в нашем реальном физическом мире наступает в определенной мировой точке мира Минковского. Рассматривая частицу, можно считать за событие ее пребывание в данной точке в данный момент времени. Независимо от того, движется частица в пространстве или нет, в мире Минковского последовательность происходящих с частицей событий образует некоторую кривую, называемую мировой линией частицы

Проведём оси , системы перпендикулярно друг другу и рассмотрим простейшие случаи. Пусть частица покоится в системе в точке ; её мировой линией в плоскости () мира Минковского будет прямая, параллельная оси (рис. 1)

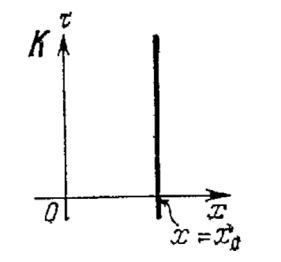


Рисунок 1 – Мировая линия тела, покоящегося в точке

Пусть другая частица равномерно движется по оси в системе со скоростью . Ее мировой линией в этой системе будет уже прямая, наклоненная под углом к оси (рис. 2).

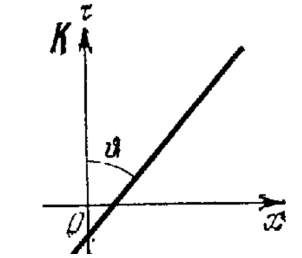


Рисунок 2 – Мировая линия тела, равномерно движущегося по оси

Рассмотрим произвольное движение частицы в этой системе отсчета. Движение точки представляется мировой линией в плоскости (, ), как это изображено на рис. 3.

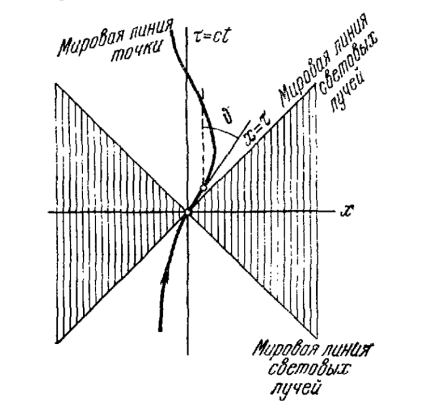


Рисунок 3 – Система действительных координат ,

Наклон мировой линии относительно оси в каждой данной точке определяется производной в этой точке. Действительно,

, где – мгновенная скорость точки (тела).

Таким образом, угол наклона определяется из равенства

, где .

Поскольку всегда , то для любого движущегося тела угол . Для световых лучей и , то есть для световых лучей мировой линией будет являться биссектриса координатного угла.

Рассмотрим две мировые точки. Квадрат интервала между ними определяется выражением . Для простоты будем считать, что событие 1 наступило в точке = 0 в момент времени = 0 (в центре координат). Так как квадрат интервала от события 1 до любого события равен , то эта плоскость разбивается на четыре квадранта I, II, III, IV прямыми = , соответствующими последовательности событий, состоящих в приходе луча, испущенного из точки = 0 в момент времени = 0, в точку в момент времени (рис. 4).

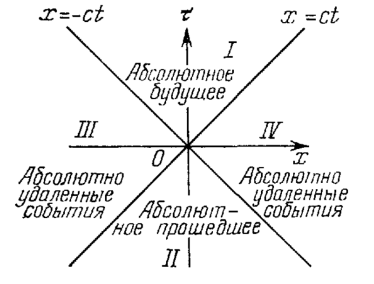


Рисунок 4 – Сечение пространственно-временного конуса плоскостью (, )

Интервал между событиями на прямых светоподобный, и «расстояние» на псевдоевклидовой плоскости между такими событиями равно нулю. Рассмотрим теперь четыре квадранта вне светоподобных прямых. В квадранте I . Следовательно, интервал между любым событием квадранта I и событием 1 времениподобный. Для всех событий этого квадранта ; следовательно, все они произойдут позже события 1 и изменить это никаким выбором системы отсчета нельзя. Это значит, что квадрант I есть область абсолютного будущего по отношению к центру координат. В квадранте II также , но в нем для всех событий ; область II – это область абсолютного прошедшего по отношению к событию 1.

В квадрантах III и IV , т. е. интервал между любым событием, расположенным в этой области, и событием 1 пространственноподобный. Все эти события происходят в точках, не совпадающих с точкой, где произошло событие 1, и изменить это за счет выбора системы отсчета нельзя. Однако можно найти такие системы отсчета, в которых данное событие из области III или IV наступило бы раньше, или позже, или, наконец, одновременно с событием 1, поскольку понятия «одновременно», «раньше» и «позже» для событий этой области относительны.

Если рассмотреть два события, расположенные произвольно на плоскости (, ), то характер интервала между ними определится наклоном прямой, соединяющей две эти точки. Если эта прямая наклонена к оси х под углом, большим , то интервал между событиями 1 и 2 времениподобный; если под углом, меньшим , – пространственноподобный. Наконец, если эта прямая параллельна биссектрисе, – интервал светоподобный.

В четырехмерном пространстве уравнение, описывающее распространение света, имеет вид . С геометрической точки зрения в 4-пространстве это уравнение описывает «конус», который обычно называют световым конусом. Внутренние полости конуса соответствуют областям «абсолютного будущего» и «абсолютного прошедшего». Световой конус, на котором лежат светоподобные направления, характеризуется еще и тем, что при всех переходах от одной ИСО к другой его положение в четырехмерном пространстве для каждой мировой точки остается неизменным.

**1.8 Тензор кривизны Римана-Кристоффеля. Секционная кривизна. Символы Кристоффеля второго рода**

Тензор кривизны {\displaystyle R(u,\;v)} Римана-Кристоффеля определяется как линейное преобразование каждой точки пространства, которое характеризует изменение вектора, параллельно перенесённого по бесконечно малому замкнутому параллелограмму, натянутому на векторы{\displaystyle u,\;v}.

Тензор кривизны в общем случае можно задать как , где – ковариантная производная в направлении касательного вектора , – билинейное отображение, называемое коммутатором или скобкой Ли, удовлетворяющее аксиоме антикоммутативности и тождеству Якоби .

В случае векторных полей и (то есть и коммутируют) тензор кривизны можно записать как . Таким образом, можно сказать, что тензор кривизны измеряет некоммутативность ковариантных производных.

Ковариантная производная принимает в качестве аргументов вектор , определённый в некоторой точке и векторное поле , определённое в некоторой окрестности точки . Результатом является вектор , также определённый в . Основное отличие ковариантной производной от производной по направлению состоит в том, что первая не должна зависеть от выбора системы координат.

В случае евклидова пространства производная векторного поля зачастую определяется как предел разности двух векторов, определённых в двух близлежащих точках. В этом случае один из векторов можно переместить в начало другого вектора при помощи параллельного переноса и затем произвести вычитание. Таким образом, простейшим примером ковариантной производной является покомпонентное дифференцирование в ортонормированной системе координат [1].

Секционная кривизна – это функция , которая зависит только от секционного направления в точке. Пусть – два линейно независимых вектора в . Тогда секционную кривизну можно выразить следующей формулой:

Далее определим коэффициенты как коэффициенты разложения ковариантной производной координатных векторов по базису

и будем находить их по следующей формуле

, где – метрический тензор (7)

Эти коэффициенты называются символами Кристоффеля второго рода. Из формулы (7) очевидна их симметричность по нижним индексам:

Теперь с помощью символов Кристоффеля второго рода можно записать формулу для нахождения риманова тензора кривизны:

(8)

Рассматривая ковариантный тензор кривизны, получаем

(9)

Тензор кривизны обладает следующими свойствами симметрии:

(10)

(11)

Последнее тождество называется алгебраическим тождеством Бьянки (первым тождеством Бьянки), хотя и было открыто Риччи.

Из этих трёх тождеств следует ещё одно важное соотношение

(12)

**2. Практическая часть**

**2.1 Постановка и решение задачи №1**

Кривизна в двумерном направлении. Докажите, что кривизна в двумерном направлении не зависит от выбора базиса , .

При движении вдоль кривой её касательная меняет направление. Назовём кривизной кривой отношение бесконечно малого приращения длины вектора перемещения точки к бесконечно малому приращению угла поворота касательной.

Производная же по времени положительного единичного вектора касательной называется в этом случае вектором кривизны кривой.

Докажем линейность функционала по всем 4 аргументам. По линейность следует из линейности скалярного произведения. По он также линеен в силу равенства (11). По и он линеен в силу равенства (12). Таким образом, получаем

,(13)

что и доказывает линейность данного функционала

Выберем базис , и базис , где , , причём определитель этого преобразования . Тогда

В силу линейности (13) и антикоммутативности (10) тензора кривизны имеем

Тогда

(14)

Теперь перейдём к рассмотрению знаменателя исходного выражения

(15)

Наконец, после сокращения (14) и (15) на получаем, что

То есть кривизна в двумерном направлении имеет одинаковый вид в любых базисах и, следовательно, не зависит от выбора базиса.

**2.2 Постановка и решение задачи №2**

Докажите, что для поверхности в кривизна в двумерном направлении совпадает с гауссовой кривизной.

Зададим поверхность в параметрическом виде . Для удобства возьмем полугеодезическую систему координат – систему координат, в которой метрика имеет вид

,

то есть , где [5].

Гауссова кривизна – мера искривления поверхности в окрестности какой-либо её точки. Гауссова кривизна является объектом внутренней геометрии поверхностей, то есть она не изменяется при изометрических изгибаниях.

Гауссова кривизна двумерной поверхности может быть выражена через коэффициенты её первой квадратичной формы и их первых и вторых производных по формуле Бриоски:

В случае формула заметно упрощается:

Так как в полугеодезической системе координат первая квадратичная форма имеет вид (11), формула Бриоски приобретает вид:

Выберем базис , где . Тогда . Отсюда следует важное равенство:

(16)

Далее, для нахождения риманова тензора кривизны, необходимо найти символы Кристоффеля второго рода относительно системы координат , так как они входят в координатные выражения тензора кривизны. Для их нахождения используется формула (7):

*,* где

Заметим, что в случае эта формула приобретает вид

Вычислим обратную матрицу

Следовательно, , остальные .

Координаты тензора кривизны валентности находятся по формуле (8)[4]:

Наконец находим ковариантный тензор по формуле (9):

(17)

Найдём . Для тензора кривизны выполняются следующие соотношения:

Из этих соотношений следует, что из всех компонент тензора кривизны только и те, которые получаются из неё перестановкой индексов, не равны 0. Для размерности 2 получаем:

Суммируя по всем индексам и учитывая только ненулевые слагаемые, с учётом данных соотношений получаем:

(18)

Из формул (16), (17) и (18) следует, что

То есть для поверхности в гауссова кривизна совпадает с кривизной в двумерном направлении.

**2.3 Постановка и решение задачи №3**

Рассмотрим в пространстве сферу , заданную уравнением с метрикой, индуцированной обычной евклидовой метрикой в . Докажите, что – пространство постоянной кривизны.

Запишем параметрическое уравнение в :

Найдём коэффициенты метрического тензора:

Остальные коэффициенты равны нулю. Далее считаем символы Кристоффеля второго рода по формулам (14) и (15). Все ненулевые символы Кристоффеля:

Далее посчитаем компоненты тензора кривизны по формуле (8):

Опускаем верхний индекс по формуле (9):

Отсюда получаем:

(19)

Теперь найдём , где .

Получаем следующее выражение:

(20)

Из выражений (19) и (20) получаем

Отсюда получаем, что кривизна является постоянной и не зависит от направления. Следовательно, сфера в пространстве является пространством постоянной кривизны.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В процессе выполнения курсовой работы были выполнены следующие задачи:

- ознакомление с псевдоевклидовым пространством, его определением и основными свойствами

- изучение основ специальной теории относительности

- выявление связи между псевдоевклидовым пространством и специальной теорией относительности;

- доказательство независимости кривизны в двумерном направлении от выбора базиса; - доказательство совпадения кривизны в двумерном направлении для поверхности в с гауссовой кривизной;

- доказательство того, что в пространстве сфера с метрикой, индуцированной обычной евклидовой метрикой в , будет являться пространством постоянной кривизны.

В результате работы была произведена устная защита курсовой работы, а также выполнен письменный отчет в соответствии со стандартами оформления научно-технической документации и с необходимыми вычислениями и пояснениями.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1 Рашевский П.К., Риманова геометрия и тензорный анализ - М.: Наука, 1967. - 644 стр.

1. Позняк Э.Г., Шикин Е.В., Дифференциальная геометрия: первое знакомство - М.: Изд-во МГУ, 1990. - 384 с.
2. Паули В., Теория относительности. Изд. 2-е, испр. и доп. Перев. с нем. - М.: Наука, 1983. — 336 с.

4 Шарафутдинов В.А. Введение в дифференциальную топологию и риманову геометрию - Н.: ИПЦ НГУ, 2018. - 282 с.

5 Чернавский А.В. Дифференциальная геометрия – М.: Мехмат МГУ, 2012. - 91 с.

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**

**высшего образования**

**«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана**

**(национальный исследовательский университет)»**

**(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ФН-11

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Ю.И. Димитриенко

« 01 » сентября 2022 г.

**ЗАДАНИЕ**

**на выполнение курсовой работы**

по дисциплине «Дифференциальная геометрия и основы тензорного исчисления»

Студент группы ФН11-52Б Хаписов М.Х.

Тема курсовой работы: *Псевдоевклидовы пространства, определение и основные свойства. Связь со специальной теорией относительности.*

Направленность КР: учебная

Источник тематики: кафедра

График выполнения работы: 25% к 5 нед., 50% к 8 нед., 75% к 11 нед., 100% к 14 нед.

***1 Задание***

* 1. Теория

Псевдоевклидовы пространства, определение и основные свойства. Связь со специальной теорией относительности.

* 1. Задание

Докажите, что кривизна в двумерном направлении

не зависит от выбора базиса . Докажите, что для поверхности в  кривизна в

двумерном направлении совпадает с гаусовой кривизной. Рассмотрим в пространстве  сферу , заданную уравнением с метрикой, индуцированной обычной евклидовой метрикой в . Докажите, что – пространство постоянной кривизны.

***2 Оформление курсовой работы***

2.1 Расчетно-пояснительная записка объёмом от 20 листов формата А4.

2.2 Перечень графического материала (плакаты, схемы и т.п.) \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

2.3 Электронную версию готовой курсовой работы (формат Word) выслать в электронный архив кафедры – на адрес электронной почты archive-fn@mail.ru

Дата выдачи задания « 01 » сентября 2022 г.

**Руководитель курсовой работы** \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Е.В. Осипов

**Студент** \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_М.Х. Хаписов